Шәкір Айдос

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан

e-mail: ajdossakir@gmail.com

6-лекция. Приближенное интегрирование

Цель лекции – сформировать у обучающихся понимание основных численных методов вычисления определённых интегралов, их теоретических основ, погрешностей и областей применимости, а также развить навыки их практического использования.

План лекции:

1 Постановка задачи

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и известна её первообразная $F(x)$, то определённый интеграл от этой функции в пределах от a до b может быть вычислен по формуле Ньютона–Лейбница:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \tag{1.1}$$

где $F'(x) = f(x)$.

Однако во многих случаях первообразная функция $F(x)$ не может быть найдена с помощью элементарных средств или является слишком сложной; вследствие этого вычисление определённого интеграла по формуле (1.1) может быть затруднительным или даже практически невыполнимым. Кроме того, на практике подынтегральная функция $f(x)$ часто задаётся таблично и тогда само понятие первообразной теряет смысл. Аналогичные вопросы возникают при вычислении кратных интегралов. Поэтому важное значение имеют приближённые и в первую очередь численные методы вычисления определённых интегралов. Задача численного интегрирования функции заключается в вычислении значения определённого интеграла на основании ряда значений подынтегральной функции. Численное вычисление однократного интеграла называется механической квадратурой, двойного — механической кубатурой. Соответствующие формулы будем называть квадратурными и кубатурными формулами. Мы сначала остановимся на численном вычислении однократных интегралов. Обычный приём механических квадратур состоит в том, что данную функцию $f(x)$ на рассматриваемом отрезке $[a, b]$ заменяют интерполяционной или аппроксимирующей функцией $\varphi(x)$ простого вида (например, полиномом), а затем приближённо полагают:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx. \tag{1.2}$$

Функция $\varphi(x)$ должна быть такова, чтобы интеграл $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ вычислялся непосредственно. Если функция $f(x)$ задана аналитически, то ставится вопрос об оценке погрешности формулы (1.2). Рассмотрим более подробно применение для этой цели интерполяционного полинома Лагранжа.

Пусть для функции $y = f(x)$ известны в $n+1$ точка $x_0, x_1, \ldots, x_n$ отрезка $[a, b]$ соответствующие значения

$$f(x_i) = y_i \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n). \tag{1.3}$$

Требуется приближённо найти:

$$\int_a^b y\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

По заданным значениям y_i построим полином Лагранжа

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\Pi_{n+1}(x)}{(x - x_i)\,\Pi'_{n+1}(x_i)}\,y_i, \tag{1.4}$$

где

$$\Pi_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n),$$

причём

$$L_n(x_i) = y_i \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Заменяя функцию $f(x)$ полиномом $L_n(x)$, получим равенство

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b L_n(x)\,dx + R_n[f], \tag{1.5}$$

где $R_n[f]$ — ошибка квадратурной формулы (1.5) (остаточный член).

Отсюда, воспользовавшись выражением (1.4), получаем приближённую квадратурную формулу

$$\int_a^b y\,dx = \sum_{i=0}^{n} A_i y_i, \tag{1.6}$$

где

$$A_i = \int_a^b \frac{\Pi_{n+1}(x)}{(x-x_i)\,\Pi'_{n+1}(x_i)}\,dx \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n). \tag{1.7}$$

Если пределы интегрирования a и b являются узлами интерполирования, то квадратурная формула (1.6) называется замкнутого типа, в противном случае — открытого типа. Для вывода коэффициентов A_i заметим, что коэффициенты A_i при данном выборе узлов не зависят от выбора функции $f(x)$.

Для полинома степени n формула (1.6) — точная, так как тогда $L_n(x) \equiv f(x)$; следовательно, в частности, формула (1.6) точна при $y = x^k$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$, т. е.

$$\int_a^b x^k\,dx = \sum_{i=0}^{n} A_i x_i^k.$$

Полагая $y = x^k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ в формуле (1.6), получим линейную систему из $n+1$ уравнений

$$\begin{cases} I_0 = \sum\limits_{i=0}^{n} A_i, \\ I_1 = \sum\limits_{i=0}^{n} A_i x_i, \\ \ldots \\ I_n = \sum\limits_{i=0}^{n} A_i x_i^n, \end{cases} \tag{1.8}$$

где

$$I_k = \int_a^b x^k\,dx = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}, \qquad (k = 0, 1, \ldots, n),$$

из которой можно определить коэффициенты $A_0, A_1, \ldots, A_n$.

Определитель системы (1.8) есть определитель Вандермонда

$$D = \prod_{i<j} (x_j - x_i) \neq 0.$$

Заметим, что при применении этого метода фактически построение полинома Лагранжа $L_n(x)$ является излишним. Простой метод подсчёта погрешности квадратурных формул разработан С. М. Никольским [3].

Пример. Вывести квадратурную формулу вида

$$\int_0^1 y\,dx = A_0 y\left(\frac{1}{4}\right) + A_1 y\left(\frac{1}{2}\right) + A_2 y\left(\frac{3}{4}\right). \tag{1.9}$$

Решение. Полагая в формуле (1.9) $y = x^k$ $(k = 0, 1, 2)$ и учитывая, что

$$\int_0^1 dx = 1, \qquad \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}, \qquad \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3},$$

получим систему

$$\begin{cases} 1 = A_0 + A_1 + A_2, \\[2mm] \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}A_0 + \dfrac{1}{2}A_1 + \dfrac{3}{4}A_2, \\[2mm] \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{16}A_0 + \dfrac{1}{4}A_1 + \dfrac{9}{16}A_2. \end{cases}$$

Отсюда

$$A_0 = \frac{2}{3}, \qquad A_1 = -\frac{1}{3}, \qquad A_2 = \frac{2}{3},$$

и, следовательно,

$$\int_0^1 y\,dx = \frac{2}{3}\,y\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{3}\,y\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3}\,y\left(\frac{3}{4}\right). \tag{1.10}$$

Квадратурная формула (1.10) открытого типа является точной для всех полиномов степени не выше второй. Нетрудно убедиться, что формула (1.10) даёт правильный результат и при $y = x^3$. Поэтому эта формула является точной также для полиномов третьей степени.

2 Квадратурные формулы Ньютона–Котеса

Пусть для данной функции $y = f(x)$ требуется вычислить интеграл

$$\int_a^b y\,dx.$$

Выбрав шаг

$$h = \frac{b-a}{n},$$

разобьём отрезок $[a, b]$ с помощью равноотстоящих точек

$$x_0 = a, \quad x_i = x_0 + ih \ (i = 1, 2, \ldots, n-1), \quad x_n = b$$

на n равных частей, и пусть

$$y_i = f(x_i) \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Заменяя функцию y соответствующим интерполяционным полиномом Лагранжа $L_n(x)$, получим приближённую квадратурную формулу

$$\int_{x_0}^{x_n} y\,dx = \sum_{i=0}^{n} A_i y_i. \tag{2.1}$$

Как известно,

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i(x) y_i, \tag{2.2}$$

где

$$p_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}. \tag{2.3}$$

Введём обозначение

$$q = \frac{x-x_0}{h}, \tag{2.4}$$

и

$$q^{[n+1]} = q(q-1)\cdots(q-n). \tag{2.5}$$

Тогда будем иметь:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \frac{q^{[n+1]}}{q-i}\, y_i. \tag{2.6}$$

Подставляя (2.6) в формулу (2.1), получаем

$$A_i = \int_{x_0}^{x_n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \frac{q^{[n+1]}}{q-i}\, dx.$$

Так как

$$q = \frac{x-x_0}{h}, \qquad dq = \frac{dx}{h},$$

то после замены переменной имеем

$$A_i = h\frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \int_0^n \frac{q^{[n+1]}}{q-i}\, dq, \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Поскольку

$$h = \frac{b-a}{n},$$

обычно полагают

$$A_i = (b-a)H_i,$$

где

$$H_i = \frac{1}{n}\frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \int_0^n \frac{q^{[n+1]}}{q-i}\, dq, \quad (i = 0, 1, \ldots, n). \tag{2.7}$$

Квадратурная формула принимает вид

$$\int_a^b y\, dx = (b-a)\sum_{i=0}^{n} H_i y_i, \tag{2.8}$$

где

$$y_i = f(a+ih), \qquad h = \frac{b-a}{n}.$$

Нетрудно убедиться, что справедливы соотношения:

$$\sum_{i=0}^{n} H_i = 1, \qquad H_i = H_{n-i}.$$

3 Формула трапеций и ее остаточный член

Применяя формулу (2.7) предыдущего параграфа, при $n = 1$ имеем:

$$H_0 = -\int\limits_0^1 \frac{\dot{q}\,(q-1)}{q}\,dq = \frac{1}{2}, \qquad H_1 = \int\limits_0^1 q\,dq = \frac{1}{2};$$

отсюда

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} y\,dx = \frac{h}{2}\,(y_0 + y_1). \tag{3.1}$$

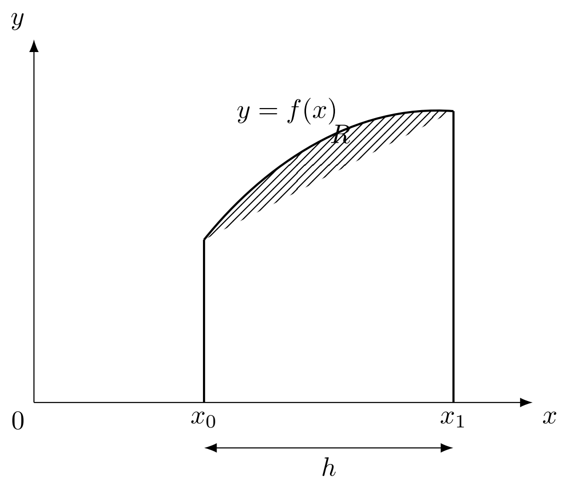


Рисунок 1

Мы получили известную формулу трапеций для приближенного вычисления определенного интеграла (рисунок 1). Остаточный член (ошибка) квадратурной формулы (3.1) равен

$$R = \int\limits_{x_0}^{x_1} y\,dx - \frac{h}{2}\,(y_0 + y_1).$$

Предполагая, что $y \in C^2[a, b]$, выведем простую формулу для остаточного члена. Будем рассматривать $R = R(h)$ как функцию шага h; тогда можно положить:

$$R(h) = \int\limits_{x_0}^{x_0+h} y\,dx - \frac{h}{2}\Big[y(x_0) + y(x_0+h)\Big].$$

Дифференцируя эту формулу по h последовательно два раза, получим:

$$\begin{aligned} R'(h) &= y(x_0+h) - \frac{1}{2}\Big[y(x_0) + y(x_0+h)\Big] - \frac{h}{2}\,y'(x_0+h) \\ &= \frac{1}{2}\Big[y(x_0+h) - y(x_0)\Big] - \frac{h}{2}\,y'(x_0+h), \end{aligned}$$

и

$$R''(h) = \frac{1}{2}\,y'(x_0+h) - \frac{1}{2}\,y'(x_0+h) - \frac{h}{2}\,y''(x_0+h) = -\frac{h}{2}\,y''(x_0+h),$$

причем

$$R(0) = 0, \qquad R'(0) = 0.$$

Отсюда, интегрируя по h и используя теорему о среднем, последовательно выводим:

$$R'(h) = R'(0) + \int\limits_0^h R''(t)\,dt = -\frac{1}{2}\int\limits_0^h t\,y''(x_0+t)\,dt$$
$$= -\frac{1}{2}\,y''(\xi_1)\int\limits_0^h t\,dt = -\frac{h^2}{4}\,y''(\xi_1),$$

где $\xi_1 \in (x_0, x_0+h)$, и

$$R(h) = R(0) + \int\limits_0^h R'(t)\,dt = -\frac{1}{4}\int\limits_0^h t^2\,y''(\xi_1)\,dt$$
$$= -\frac{1}{4}\,y''(\xi)\int\limits_0^h t^2\,dt = -\frac{h^3}{12}\,y''(\xi),$$

где $\xi \in (x_0, x_0+h)$. Таким образом, окончательно имеем:

$$R = -\frac{h^3}{12}\,y''(\xi), \tag{3.2}$$

где $\xi \in (x_0, x_1)$.

Отсюда, в частности, следует, что если $y'' > 0$, то формула (3.1) дает значение интеграла с избытком, если же $y'' < 0$ — то с недостатком.

4 Формула Симпсона и ее остаточный член

Из формулы (2.7) при $n = 2$ получаем:

$$H_0 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^2 (q-1)(q-2)\,dq = \frac{1}{4}\left(\frac{8}{3} - 6 + 4\right) = \frac{1}{6},$$

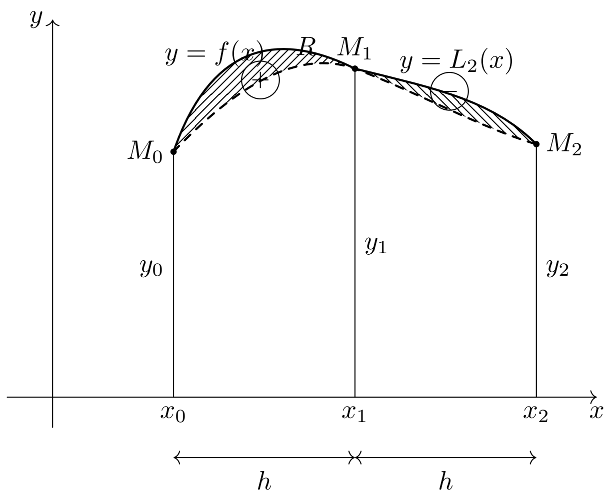
$$H_1 = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}\int\limits_0^2 q(q-2)\,dq = \frac{2}{3},$$

$$H_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^2 q(q-1)\,dq = \frac{1}{6}.$$

Следовательно, так как $x_2 - x_0 = 2h$, имеем:

$$\int\limits_{x_0}^{x_2} y\,dx = \frac{h}{3}\,(y_0 + 4y_1 + y_2). \tag{4.1}$$

Формула (4.1) носит название *формулы Симпсона.* Геометрически эта формула получается в результате замены данной кривой $y = f(x)$ параболой $y = L_2(x)$, проходящей через три точки $M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ (рисунок 2).



Остаточный член формулы Симпсона равен

$$R = \int\limits_{x_0}^{x_2} y\,dx - \frac{h}{3}\,(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Предполагая, что $y \in C^4[a, b]$, аналогично тому как это делалось для формулы трапеций, выведем более простое выражение для R. Фиксируя среднюю точку x_1 и рассматривая $R = R(h)$ как функцию шага h $(h \geq 0)$, будем иметь:

$$R(h) = \int\limits_{x_1-h}^{x_1+h} y\,dx - \frac{h}{3}\Big[y(x_1 - h) + 4y(x_1) + y(x_1 + h)\Big].$$

Отсюда, дифференцируя функцию $R(h)$ по h последовательно три раза, получим:

$$\begin{aligned} R'(h) &= \big[y(x_1+h)+y(x_1-h)\big]-\frac{1}{3}\big[y(x_1-h)+4y(x_1)+y(x_1+h)\big] \\ &\quad -\frac{h}{3}\big[-y'(x_1-h)+y'(x_1+h)\big] \\ &= \frac{2}{3}\big[y(x_1-h)+y(x_1+h)\big]-\frac{4}{3}y(x_1)-\frac{h}{3}\big[-y'(x_1-h)+y'(x_1+h)\big]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R''(h) &= \frac{2}{3}\big[-y'(x_1-h)+y'(x_1+h)\big]-\frac{1}{3}\big[-y'(x_1-h)+y'(x_1+h)\big] \\ &\quad -\frac{h}{3}\big[y''(x_1-h)+y''(x_1+h)\big] \\ &= \frac{1}{3}\big[-y'(x_1-h)+y'(x_1+h)\big]-\frac{h}{3}\big[y''(x_1-h)+y''(x_1+h)\big]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R'''(h) &= \frac{1}{3}\big[y''(x_1-h)+y''(x_1+h)\big]-\frac{1}{3}\big[y''(x_1-h)+y''(x_1+h)\big]-\frac{h}{3}\big[-y'''(x_1-h)+y'''(x_1+h)\big] \\ &= -\frac{h}{3}\Big[y'''(x_1+h)-y'''(x_1-h)\Big]=-\frac{2h^2}{3}\,y^{\mathrm{IV}}(\xi_3), \qquad \xi_3\in(x_1-h,\ x_1+h). \end{aligned}$$

Кроме того, имеем:

$$R(0)=0, \qquad R'(0)=0, \qquad R''(0)=0.$$

Последовательно интегрируя $R'''(h)$, используя теорему о среднем, находим:

$$R''(h)=R''(0)+\int\limits_0^h R'''(t)\,dt=-\frac{2}{3}\int\limits_0^h t^2y^{\mathrm{IV}}(\xi_3)\,dt=-\frac{2}{3}\,y^{\mathrm{IV}}(\xi_2)\int\limits_0^h t^2\,dt=-\frac{2}{9}\,h^3y^{\mathrm{IV}}(\xi_2),$$

где $\xi_2\in(x_1-h,\ x_1+h)$;

$$R'(h)=R'(0)+\int\limits_0^h R''(t)\,dt=-\frac{2}{9}\int\limits_0^h t^3y^{\mathrm{IV}}(\xi_2)\,dt=-\frac{2}{9}\,y^{\mathrm{IV}}(\xi_1)\int\limits_0^h t^3\,dt=-\frac{1}{18}\,h^4y^{\mathrm{IV}}(\xi_1),$$

где $\xi_1\in(x_1-h,\ x_1+h)$;

$$R(h)=R(0)+\int\limits_0^h R'(t)\,dt=-\frac{1}{18}\int\limits_0^h t^4y^{\mathrm{IV}}(\xi_1)\,dt=-\frac{1}{18}\,y^{\mathrm{IV}}(\xi)\int\limits_0^h t^4\,dt=-\frac{h^5}{90}\,y^{\mathrm{IV}}(\xi),$$

где $\xi\in(x_1-h,\ x_1+h)$.

Таким образом, остаточный член формулы Симпсона равен

$$R=-\frac{h^5}{90}\,y^{\mathrm{IV}}(\xi), \tag{2}$$

где $\xi\in(x_0,\ x_2)$.

Следовательно, эта формула является точной для полиномов не только второй, но и третьей степени, т. е. формула Симпсона при относительно малом числе ординат обладает повышенной точностью.

5 Контрольные вопросы

1. В чём заключается задача численного интегрирования?
2. Что называется квадратурной формулой?
3. Чем отличаются квадратурные формулы замкнутого и открытого типа?
4. В чём состоит идея замены подынтегральной функции интерполяционным полиномом?
5. Как строится интерполяционный полином Лагранжа?
6. Как выводятся коэффициенты квадратурной формулы?
7. Что такое алгебраическая степень точности квадратурной формулы?
8. Как определяется погрешность квадратурной формулы?
9. Для каких полиномов формулы Ньютона–Котеса являются точными?
10. В чём преимущества и недостатки численных методов интегрирования по сравнению с аналитическим методом?

6 Список литературы

Для получения дополнительных и более полных сведений студентам рекомендуется обратиться к литературе [1–11].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Mikeladze, Sh. E. 1953. *Chislennye metody matematicheskogo analiza.* Moscow: Gostekhizdat.

[2] Mikhlin, V. E. 1951. *Chislennyi analiz.* Moscow: IL.

[3] Nikolskii, S. M. 1958. *Kvadraturnye formuly.* Moscow: Fizmatgiz.

[4] Markov, A. 1911. *Ischislenie konechnykh raznostei.* 2nd ed. Moscow: Matezis.

[5] Steffensen, I. F. 1935. *Teoriya interpolyatsii.* Moscow–Leningrad.

[6] Berezin, I. S., and N. P. Zhidkov. 1959. *Metody vychislenii*. Vol. 1. Moscow: Fizmatgiz.

[7] Scarborough, J. 1934. *Chislennye metody matematicheskogo analiza*. Moscow: GTTI.

[8] Krylov, A. N. 1933. *Lektsii o priblizhennykh vychisleniyakh*. 2nd ed. Moscow: IAN SSSR.

[9] Krylov, V. I. 1959. *Priblizhennoe vychislenie integralov*. Moscow: Fizmatgiz.

[10] Salvadori, M. J. 1955. *Chislennye metody v tekhnike*. Moscow: IL.

[11] Fikhtengolts, G. M. 1948. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya*. Vol. 2. Moscow: Gostekhizdat.